A02

14

Questo testo è tratto originariamente dalle lezioni tenute dal professor Lucio Mezzetti nel corso di Onde Elettromagnetiche nell'anno accademico 1957-58 presso l'Università di Roma "La Sapienza" e allora riprodotte a cura degli Organismi Rappresentativi degli studenti. Pensiamo di far cosa utile nel riproporle come ausilio e integrazione ai corsi di Elettromagnetismo e comunque come introduzione a corsi più avanzati di Elettrodinamica classica.

Pur contenendo largamente sviluppi matematici legati alla soluzione dell'equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico, non abbiamo nessuna pretesa che sia un testo di metodi matematici per la fisica, ma piuttosto sia di introduzione e come esempio applicativo all'elettromagnetismo classico.

Bruno Borgia   Amilcare Bietti

ELEMENTI DI ELETTROMAGNETISMO

00173 Roma, via Raffaele Garofalo, 133 a/b
tel. (06) 72672233 telefax 72672222

www.aracne–editrice.it
info@aracne–editrice.it

88-7999-474-3

I edizione: marzo 2003

INDICE

Bibliografia

Per i Capitoli I e II

- R. Becker, *Teoria dell'elettricità* , Sansoni, 1949.
- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, 1962.
- J. A. Stratton, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Ed. Scientifiche Einaudi, 1952.
- R. Becker, F. Sauter, *Electromagnetic Fields and Interactions*, Blaisdell Publishing Company, 1964.

Per il Capitolo III

- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *op. cit.*
- C. Kittel, *Elementary Statistical Physics*, John Wiley & Sons, 1958.

Per il Capitolo IV

- R. Becker, *op. cit.*
- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *op. cit.*

Per i Capitolo V e VI

- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *op. cit.*
- J. A. Stratton, *op. cit.*
- R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publisher, 1953.
- L. Pauling, E. B. Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, 1935.
- P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vol. I, Mc Graw-Hill, 1953.
- P. Dennery, A. Krzywichi, *Mathematics for Physicists*, Harper International Ed., 1967.

Per il Capitolo VII

- R. Becker, *op. cit.*
- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *op. cit.*

Per i Capitoli VIII, IX, X

- W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *op. cit.*

Per il Capitolo XI

- R. Becker, *op. cit.* Vol. II.
- H. M. Schwartz, *Introduction to Special Relativity*, Mc Graw-Hill, 1968.

CAPITOLO I

RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE

1 Alcune relazioni fondamentali tra vettori

In questo paragrafo si presuppongono noti i concetti di vettore e di operazioni sui vettori, cioè addizione, sottrazione, prodotto interno o scalare, prodotto esterno o vettoriale, nonché gli operatori differenziali gradiente, rotazione, divergenza.

Prodotti di tre vettori:

a) Prodotto di un vettore per il prodotto scalare di altri due. $\mathbf{a}\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{d}$. Il vettore $\mathbf{d}$ è omotetico ad $\mathbf{a}$ con rapporto di omotetia $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$. Tale prodotto non gode della proprietà commutativa: infatti $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\ \mathbf{c}$ è ora un vettore omotetico a $\mathbf{c}$.

b) Prodotto scalare di un vettore per il prodotto vettore di altri due (prodotto misto) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Ricordando le espressioni del prodotto vettore e del prodotto scalare attraverso le componenti cartesiane, si ha

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

da cui $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (1.1)

Le eguaglianze di cui sopra si ottengono facilmente se si tiene presente che un determinante non viene alterato permutando circolarmente le linee della matrice da cui si calcola.

c) Prodotto vettoriale di un vettore per il prodotto vettore di altri due.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{f}$$

La componente f_x del vettore prodotto risulta

$$f_x = a_y\ (b_x\ c_y - b_y\ c_x) - a_z\ (b_z\ c_x - b_x\ c_z) =$$

$$= b_x\ (a_x\ c_x + a_y\ c_y + a_z\ c_z) - c_x\ (a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z)$$

da cui ricordando la definizione di prodotto scalare

$$f_x = b_x\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - c_x\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\ ;$$

vettorialmente

$$\mathbf{f} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{1.2}$$

Il vettore $\mathbf{f}$ giace nel piano individuato da $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ ed è perpendicolare al piano passante per $\mathbf{a}$ ed $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ cioè alla proiezione di $\mathbf{a}$ sul piano di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Sviluppando i termini della relazione seguente secondo la (1.2) se ne dimostra facilmente l'uguaglianza a zero

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$$

Se si suppone il vettore $\mathbf{b}$ coincidente con $\mathbf{a}$, il prodotto $\mathbf{f} = \mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ si presta ad alcune considerazioni di carattere geometrico. Secondo la (1.2) otteniamo

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\ a^2$$

esprimendo in tal modo la decomposizione di $\mathbf{f}$ secondo le direzioni di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$. Notiamo quindi che $\mathbf{f}$ è perpendicolare ad $\mathbf{a}$ e $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$; inoltre giace nel piano di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$.

Il componente di $\mathbf{f}$ secondo la direzione di $\mathbf{a}$, come risulta dalla figura, è in modulo

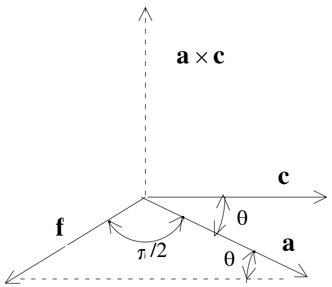

Fig. 1

$f_a = \dfrac{f}{\mathrm{tg}\theta}$ mentre il modulo del componente secondo $\mathbf{c}$ è dato da $f_c = \dfrac{f}{\mathrm{sen}\theta}$.

Per il modulo di $\mathbf{f}$ si ha $f = a^2\,c\ \mathrm{sen}\ \theta$ da cui si ricava

$$f_a = a^2\,c\cos\theta$$
$$f_c = a^2\,c$$

d) Prodotto scalare di due prodotti vettoriali $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$. Questo prodotto si può trasformare come segue, se si tiene presente la (1.1):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]$$

Poiché $\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$ segue, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{c}$ ambo i membri

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

2 Il vettore simbolico ∇

Per semplificare i calcoli conviene introdurre un vettore simbolico, definito come segue attraverso le sue componenti, che, come si verifica, al variare del sistema di riferimento si trasformano allo stesso modo delle componenti di un vettore ordinario:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial_x}; \frac{\partial}{\partial_y}; \frac{\partial}{\partial_z} \right)$$

Ovviamente tale vettore non definisce alcuna grandezza, ma è un operatore matematico differenziale e quindi lineare. Tale operatore va usato come un vettore ordinario interpretando adeguatamente le operazioni che con esso si eseguono sui vettori effettivi.

In tal modo si perviene alle seguenti definizioni:

a) Prodotto a sinistra dello scalare μ per il vettore ∇:

$$\nabla\mu = \left(\frac{\partial_\mu}{\partial_x}; \frac{\partial_\mu}{\partial_y}; \frac{\partial_\mu}{\partial_z} \right) = \text{grad } \mu$$

Tale prodotto rappresenta ovviamente un vettore effettivo e coincide con il gradiente dello scalare μ

b) Prodotto scalare del vettore ∇ per il vettore effettivo $\mathbf{a}$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial_x} + \frac{\partial a_y}{\partial_y} + \frac{\partial a_z}{\partial_z} = \text{div } \mathbf{a}$$

Si verifica immediatamente che il risultato dell'operazione è uno scalare, a cui si assegna il significato di divergenza di **a**.

c) Prodotto vettore del vettore ∇ per il vettore **a**.

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}]$$

L'operazione dà origine ad un vettore, il quale è coincidente con l'operazione di rotazione eseguita sul vettore effettivo **a**.

Sono definiti evidentemente anche i simboli

$$\nabla \times \nabla\mu \; ; \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a}$$

intendendo, come si fa usualmente, di eseguire le operazioni a partire da destra. Le espressioni precedenti, interpretate simbolicamente (considerando cioè ∇ un vero e proprio vettore), sono evidentemente identiche a zero, come inoltre si può verificare trasportando i simboli nel linguaggio differenziale usuale (rot grad μ, div rot **a**).

Occorre notare che la posizione dei simboli che intervengono nelle suddette operazioni non può essere modificata senza alterarne completamente il significato.

L'utilità della introduzione del vettore simbolico ∇ si riscontra per esempio se si eseguono i seguenti calcoli

a) $\text{grad } (\mu v) = \nabla (\mu v) = \mu \nabla v + v \nabla \mu = \mu \text{ grad } v + v \text{ grad } \mu$

Come si vede da questo primo esempio, essendo ∇ in realtà un operatore differenziale, lineare, si comporta rispetto al prodotto di due elementi (vettori o scalari) come il simbolo derivata D rispetto al prodotto di due variabili scalari o vettoriali $D(a\, b) = a\, D\, b + b\, D\, a$

b) $\text{div } (\mu \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\mu \mathbf{a}) = \mu \nabla \cdot \mathbf{a} + (\nabla \mu) \cdot \mathbf{a} =$
$= \mu \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mu = \mu \text{ div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \mu$

Solo con tale combinazione dei simboli, operazioni, elementi, si ha per risultato una grandezza scalare.

c) $\text{div } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$

Tale espressione sembrerebbe a prima vista non essere coerente con quanto finora abbiamo esposto, ma si deve ricordare che ∇, avendo le proprietà di un operatore differenziale, deve operare sul prodotto con le stesse modalità della derivata (v.s.); inoltre, essendo un operatore, non può essere posposto all'elemento su cui opera, come richiederebbe la (1.1) (ponendo $\mathbf{a} = \nabla$; $\mathbf{b} = \mathbf{a}$; $\mathbf{c} = \mathbf{b}$); pertanto occorrendo invertire il prodotto $\mathbf{b} \times \nabla$, consideriamo tale prodotto alla stessa stregua del prodotto vettore usuale; è necessario allora cambiare segno al termine interessato.

d) $\quad \text{rot}\, \mu\, \mathbf{a} = \nabla \times (\mu\, \mathbf{a}) = \mu\, \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla\, \mu) \times \mathbf{a} = \mu\, \text{rot}\, \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad}\, \mu;$

e) $\quad \text{rot rot}\, \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla\, (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\, \mathbf{a} = \text{grad div}\, \mathbf{a} - \nabla^2\, \mathbf{a}$

dove si è applicata la formula (1.2) per il doppio prodotto vettore, ed il simbolo ∇^2 non sta ad indicare altro che il parametro differenziale secondo (Laplaciano).

f) $\quad \text{grad}\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\, \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

Tale formula si può verificare sviluppando i termini a secondo membro.

3 Esistenza ed unicità di un campo vettoriale, dati sorgenti e vertici

Teorema: Un campo vettoriale è univocamente determinato dalla funzione di densità delle sorgenti , e dalla funzione di circolazione, supponendo che le sorgenti e i vortici siano tutti a distanza finita: deve cioè esistere un dominio limitato al di fuori del quale la densità delle sorgenti e dei vortici è uguale a zero.

$$\begin{aligned} &\text{Sia } s = \nabla \cdot \mathbf{v} \text{ funzione di densità} \\ &\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v} \text{ funzione di circolazione} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ovviamente è $\nabla \cdot \mathbf{c} = 0$, <u>qualunque sia</u> $\mathbf{v}$.
Diciamo che il vettore soluzione è dato da

$$\mathbf{v} = - \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \text{ dove} \tag{1.4}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{s(x'_\alpha)}{r(x_\alpha x'_\alpha)}\, dv' \tag{1.5}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{c(x'_\alpha)}{r(x_\alpha x'_\alpha)}\, dv' \tag{1.6}$$

intendendo eseguire l'integrazione su tutto lo spazio e chiamando

x'_α il punto potenziante ($\alpha = 1, 2, 3$)

x_α il punto di campo o potenziato

r la distanza fra x_α e x'_α

Per provarlo verifichiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = - \nabla \cdot \nabla\varphi + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = - \nabla^2\varphi =$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\nabla^2 \int \frac{s}{r} dv' =$$

$$= - \frac{1}{4\pi}\int s\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv'$$

E' possibile scambiare l'operatore ∇^2 con l'integrale poiché ∇ opera solo sui punti di campo.

Ricordiamo che $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = - 4\pi\, \delta(r)$; infatti sappiamo che $\frac{1}{r}$ è funzione armonica, cioè

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ per } r \neq 0 \text{ ed inoltre che}$$

$$\int \nabla \cdot \left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int_s \left(\nabla \frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{n} \; d\,S' =$$

$$= - \int_s \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS' = - \int d\,\Omega \,.$$

Si è trasformato l'integrale di volume in integrale superficiale usando ovviamente il teorema di Gauss.

Se il punto x_α di campo è fuori della superficie di integrazione tale integrale è nullo, altrimenti vale 4π, ossia l'angolo solido sotto cui è vista la superficie chiusa di integrazione dal punto x. Pertanto sono verificate le proprietà della funzione di Dirac δ (r) moltiplicata per -4π.

Oltre alle proprietà sopra accennate della funzione δ (r), cioè

$$\delta\,(x - x_0) = 0 \text{ per } x \neq x_0$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\, dx = 1 \text{ per } a \leq x_0 \leq b$$

ricordiamo anche

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

con ε arbitrario.

In definitiva si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = - \frac{1}{4\pi} \int_s \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv' = - \frac{1}{4\pi} \int_s (x'_\alpha) \cdot (- 4\pi\delta(r))\, dv' = s\,(x_\alpha).$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = - \nabla \times \nabla\, \varphi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\, \mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int \nabla\left(\nabla \frac{c}{r}\right)dv' - \int c\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)dv' \right]$$

Il secondo termine dell'ultima eguaglianza, come si è visto analogamente sopra, vale 4π **c** (x_α). Occorre quindi dimostrare che il primo termine è uguale a zero.

Richiamiamo la seguente eguaglianza di carattere vettoriale, stabilita precedentemente (v. § 2 comma f)

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\, \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

dove porremo $\mathbf{a} = \mathbf{c}$; $\mathbf{b} = \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

Quindi

$$\nabla\left[\mathbf{c} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] = (\mathbf{c} \cdot \nabla) \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \mathbf{c} \times \left[\nabla \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] = (\mathbf{c} \cdot \nabla) \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

Intendendo indicare l'integrale $\int \nabla \left(\nabla \frac{c}{r}\right) dv'$ col simbolo **I** e con I_α le sue tre componenti, avremo

$$\mathbf{I} = \int (\mathbf{c} \cdot \nabla)\, \nabla \left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int (\mathbf{c} \cdot \nabla')\left(\frac{1}{r}\right) dv'$$

$$I_\alpha = \int (\mathbf{c} \cdot \nabla')\, \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) dv' = \int \nabla' \cdot \left\{c \cdot \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dv' -$$

$$- \int (\nabla' \cdot \mathbf{c}) \left[\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dv'$$

avendo fatto uso della

$$\nabla \cdot m\, \mathbf{a} = m\, \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla m$$

dove $\mathbf{a} = \mathbf{c}$; $m = \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)$

Poiché $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$, applicando il teorema della divergenza si giunge a stabilire

$$I_\alpha = \int_v \nabla' \cdot \left\{ c \cdot \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} dv' =$$

$$= \int_s \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} \, d\, S'$$

Tale ultimo integrale vale zero, appena si faccia tendere la superficie S all'infinito; infatti abbiamo supposto che la funzione di circolazione tenda a zero per x_α tendente ad infinito di ordine almeno come $\frac{1}{r}$.

Con ciò è dimostrata l'esistenza della soluzione. Diremo φ ed $\mathbf{A}$ i potenziali del campo vettoriale $\mathbf{v}$. Supponiamo ora che esistano due soluzioni $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ che verificano ambedue le equazioni del campo. Per il teorema di sovrapposizione si ha anche $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ sarà soluzione; quindi avremo

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = s \qquad \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = s \qquad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{c} \qquad \nabla \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{c} \qquad \nabla \times \mathbf{w} = 0$$

Sarà $\mathbf{w} = - \nabla \psi$, con $\nabla^2 \psi = 0$

Applicando il teorema di Gauss si ha

$$\int \psi(\nabla\psi) \cdot \mathbf{n} \, d\, S = \int \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) \, dv = \int (\nabla\psi)^2 \, dv + \int \psi \nabla^2 \psi \, dv$$

in cui il primo membro si annulla perché $\lim\limits_{x_a \to \infty} \psi = 0$ almeno come $\frac{1}{r}$, mentre l'ultimo termine dell'ultima eguaglianza è uguale a zero poiché $\nabla^2 \psi = 0$.

Rimane

$$\int (\nabla \psi)^2 dv = \int (\mathbf{w})^2 \, dv = 0$$

Tale uguaglianza è vera solo se $\mathbf{w} = 0$.

Analogamente si sarebbe potuto assumere $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{A}$ dimostrando ugualmente che $\mathbf{w} = 0$.

In conclusione possiamo dire:

1) se sono dati s e **c** e si ha $\lim\limits_{x_a \to \infty} s = 0$, $\lim\limits_{x_a \to \infty} \mathbf{c} = 0$, allora **v** è univocamente determinato.

2) Se **v** ha sorgenti s, ma non vortici (**c** = 0), allora è derivabile da un potenziale scalare φ.

3) Se **v** ha vortici **c** ma non ha sorgenti (s = 0), esso è derivabile da un potenziale vettore **A**.

4) Nelle regioni in cui è s = 0 e **c** = 0, **v** è ottenibile o da un potenziale φ, con $\nabla^2\varphi = 0$, o da un potenziale **A**, con $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0$ (campo armonico).

5) **v** è sempre derivabile dai potenziali φ e **A**.

6) Se è ovunque s = 0, **c** = 0, allora **v** = 0.

4 Il teorema di Green

Il teorema di Green dice: siano φ e ψ due qualsiasi funzioni scalari, definite e continue nel volume V di contorno S, con le loro derivate prime e seconde; allora vale la relazione

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)dv = \int_S (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)dS \qquad (1.7)$$

Per dimostrarlo, basta osservare che:

$$\text{div}\,(\varphi\nabla\psi) = \nabla \cdot (\varphi\nabla\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\nabla\psi$$

$$\text{div}\,(\psi\nabla\varphi) = \nabla \cdot (\psi\nabla\varphi) = \psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi\nabla\varphi$$

da cui sottraendo si ha: $\nabla(\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi) = \varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi$ e applicando il teorema di Gauss al vettore $\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi$ si dimostra la (1.7).